

ANALISIS MOMEN INERSIA ASTEROID ELIPSOIDAL DENGAN VALIDASI NUMERIK MENGGUNAKAN INTEGRASI SIMPSON 3D

Alvi Sahrin Nasution¹, Hamidah Nasution², Rizal Muhaimin³, Naysla Aura Siffa⁴,
Nafasa Zahri⁵, Keisya Amelia Putri⁶, Maysi Puspita⁷

alvisahrin@unimed.ac.id¹, hamida_mat67@yahoo.com², muhaiminrizal.id@gmail.com³,
nayslaaurasiffa@gmail.com⁴, nafasazahri208@gmail.com⁵, keisyaamelia2007@gmail.com⁶,
maysipuspita8@gmail.com⁷

Universitas Negeri Medan

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menghitung momen inersia asteroid Ryugu yang dimodelkan sebagai elipsoid triaksial kepadatan seragam menggunakan pendekatan integral tiga kali lipat secara analitis dan memvalidasinya dengan metode numerik Simpson 3D berbasis Python. Data fisik Ryugu diambil dari misi Hayabusa, dengan sumbu semi mayor, sedang, dan minor masing-masing 502 m, 438 m, dan 267,5 m, dan kepadatan 1190 kg/m³. Momen larutan analitik inersia dihitung berdasarkan rumus klasik elipsoid homogen, sedangkan implementasi numerik dilakukan oleh aturan 3D Simpson pada kisi dengan resolusi yang bervariasi ($N = 51, 101, 151$). Hasil perhitungan analitik menghasilkan nilai dan, dengan hierarki, yang konsisten dengan geometri elipsoid. Validasi numerik menunjukkan kesalahan relatif kurang dari 0,1% pada resolusi $N=151$, mengkonfirmasi akurasi dan konvergensi metode 3D Simpson. Studi ini menyimpulkan bahwa metode numerik yang dikembangkan terbukti dapat diandalkan untuk perhitungan momen inersia objek 3D dan dapat menjadi landasan komputasi untuk model asteroid yang lebih kompleks di masa depan $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} > I_{yy} > I_{xx}$.

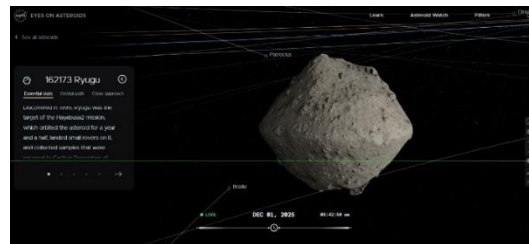
Kata Kunci: Momen Inersia, Asteroid Ryugu, Elipsoid, Triple Integral, Simpson 3D, Python, Validasi Numerik.

PENDAHULUAN

Asteroid, sebagai benda kecil di Tata Surya, adalah pusat upaya untuk merekonstruksi bagaimana planet mirip Bumi terbentuk dan berubah dari waktu ke waktu. Menyelidiki asteroid terutama Asteroid Dekat Bumi (NEA) penting tidak hanya untuk membangun rencana pertahanan planet terhadap dampak potensial, tetapi juga untuk menyelidiki Tata Surya awal dan mengevaluasi kemungkinan prospek sumber daya untuk masa depan [1]. Untuk alasan ini, astronomi modern dan mekanika langit sangat menekankan pada penentuan karakteristik fisik objek tersebut. Untuk studi jangka panjang tentang dinamika asteroid, penting untuk mengetahui parameter internal, terutama momen inersia (I). Momen inersia mengukur bagaimana massa suatu benda didistribusikan relatif terhadap sumbu rotasinya dan oleh karena itu merupakan faktor kunci yang mengatur perilaku rotasi. Besarnya mengontrol bagaimana asteroid merespons torsi eksternal dan memengaruhi stabilitas putaran dan presesi. Seperti yang dicatat oleh [2], gangguan seperti tabrakan atau efek YORP dapat mengubah keadaan putaran asteroid, akhirnya mendorongnya untuk berputar di sekitar sumbu yang terkait dengan momen inersia terbesar. Keadaan putaran yang dibentuk oleh momen inersia juga mempengaruhi proses non-gravitasi, termasuk Efek Yarkovsky. Efek ini muncul dari radiasi ulang termal yang tidak merata dari permukaan yang menghasilkan daya dorong yang lemah, namun dalam skala waktu yang lama dapat menggeser orbit asteroid secara terukur [1]. Oleh karena itu,

memperoleh nilai yang dapat diandalkan dari momen inersia merupakan prasyarat penting untuk meramalkan lintasan asteroid dan evolusi dinamisnya.

Contoh menonjol yang menggambarkan kesulitan pemodelan benda tidak beraturan adalah asteroid tipe-C (162173) Ryugu. NEA ini dikenal dengan bentuk "berlian" atau spinning-top dan sangat diduga sebagai benda tumpukan puing-puing dengan interior yang sangat tidak seragam. Ryugu menjadi fokus utama setelah misi Hayabusa2 JAXA mengembalikan pengamatan ekstensif. Misi ini menghasilkan model bentuk polihedral resolusi tinggi dan perkiraan kepadatan yang mengungkapkan distribusi massa yang rumit dan pola rotasi [3].



Gambar 1. Visualisasi 3D Asteroid Dekat Bumi (162173) Ryugu [4].

Karena fitur-fitur ini, Ryugu membutuhkan perhitungan momen inersia yang dapat menangani ketidakaturan geometris ekstrem dan kepadatan yang berpotensi heterogen, menjadikannya tolok ukur yang sangat baik untuk memajukan metode komputasi. Model polihedral biasanya digunakan untuk mewakili asteroid dengan kesetiaan geometris tinggi. Namun, permukaannya yang bergerigi dan kemungkinan variabilitas internal memaksa para peneliti untuk mengandalkan integrasi numerik yang menuntut. Untuk mengelola kompleksitas ini, analisis mekanika langit sering dimulai dari elipsoid triaksial yang lebih sederhana dan didefinisikan secara matematis. Bentuk ideal ini menyediakan ekspresi bentuk tertutup yang mengurangi integral volume yang sulit dan menyediakan kasus referensi untuk memeriksa akurasi pendekatan numerik yang lebih rumit [5].

Dari sudut pandang fisik, struktur tumpukan puing-puing dengan kepadatan yang tidak merata diperkirakan tersebar luas di antara asteroid, termasuk Ryugu. Namun bahkan ketika menggunakan bentuk polihedral yang realistis, pemodelan awal biasanya mengasumsikan kepadatan yang seragam. Penyederhanaan tingkat pertama ini memungkinkan derivasi analitik dan berfungsi sebagai batu loncatan sebelum memperkenalkan kontras kepadatan internal atau kompleksitas lainnya [6]. Akibatnya, elipsoid kepadatan seragam menempati peran mendasar yang harus dipahami sepenuhnya sebelum menangani kasus yang lebih realistis. Mengingat bahwa bentuk yang sangat tidak teratur dan kepadatan heterogen membuat perhitungan momen inersia dan medan gravitasi menjadi menantang, penelitian ini diatur di sekitar dua tujuan utama. Yang pertama adalah untuk mendapatkan ekspresi analitik untuk saat inersia elipsoid kepadatan seragam melalui formulasi triple-integral. Yang kedua adalah mengembangkan prosedur numerik berbasis Python yang efisien menggunakan skema integrasi 3-D Simpson yang dapat diperluas ke geometri asteroid yang kompleks. Metode numerik akan divalidasi secara ketat dengan membandingkan hasilnya dengan larutan analitik elipsoid [7].

METODE PENELITIAN

Kalkulus Multivariat

Konsep momen inersia untuk benda kontinu dirumuskan menggunakan beberapa integral. Integral ganda memperluas integral variabel tunggal ke fungsi dua variabel dengan mengambil batas jumlah Riemann di atas partisi area kecil [8]. Integral tiga lebih lanjut memperluas gagasan ini ke ruang tiga dimensi, menjumlahkan kontribusi dari semua elemen volume dalam suatu wilayah, dan berfungsi sebagai dasar matematis untuk besaran fisik volumetrik, termasuk momen inersia [9].

Momen Inersia Objek Kontinu

Momen inersia menggambarkan resistensi tubuh terhadap perubahan gerakan rotasi. Untuk distribusi massa kontinu, itu ditulis sebagai tiga integral di atas volume:

$$I = \iiint_Q \rho(x, y, z) dV$$
$$I_{xx} = \iiint_Q \rho(y^2 + z^2) dV, I_{yy} = \iiint_Q \rho(x^2 + z^2) dV, I_{zz} = \iiint_Q \rho(x^2 + y^2) dV$$

dengan komponen Cartesian yang didefinisikan relatif terhadap sumbu x, y, dan z [10]. Ekspresi ini memberikan dasar analitis standar untuk menghitung momen inersia dari berbagai bentuk geometris.

Seragam Kepadatan Elipsoid

Bentuk asteroid sering diperkirakan sebagai elipsoid triaksial karena geometri ini menangkap bentuk keseluruhan dari banyak asteroid nyata. Permukaan elipsoid dijelaskan oleh:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

sedangkan domain volume yang digunakan untuk integrasi adalah:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

[11]. Dengan asumsi kepadatan seragam, volume elipsoid adalah: ρ_0

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

Jadi massa totalnya menjadi:

$$M = \rho_0 V = \frac{4}{3}\pi abc \rho_0$$

[9]. Model elipsoid homogen ini berfungsi sebagai dasar dasar sebelum beralih ke kasus tidak teratur atau heterogen yang lebih realistis [6], dan banyak digunakan sebagai referensi untuk memvalidasi teknik numerik lanjutan [5].

Momen Inersia Seragam Elipsoid

Untuk elipsoid homogen, momen analitis klasik inersia tentang sumbu utama adalah:

$$I_{xx} = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2), I_{yy} = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2), I_{zz} = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2).$$

[9]. Hasil bentuk tertutup ini memberikan "kebenaran dasar" yang digunakan untuk memeriksa perhitungan numerik.

Pendekatan Statistik Metode Simpson 3D

Integral rangkap tiga untuk benda tidak beraturan jarang menghasilkan solusi

bentuk tertutup, sehingga skema numerik seperti metode Simpson 3D digunakan sebagai gantinya. Aturan Simpson orde ketiga klasik, awalnya untuk integral 1-D, dapat diperluas ke 3-D dengan menerapkan produk bobot Simpson di sepanjang setiap sumbu, memberikan:

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \sum_{i,j,k} w_i w_j w_k f(x_i, y_j, z_k) \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z.$$

Dalam praktiknya, domain didiskritisasi menjadi kisi 3-D, bobot Simpson ditetapkan di setiap arah, fungsi indikator memilih titik di dalam elipsoid, dan semua kontribusi tertimbang dijumlahkan. Akurasi diperiksa melalui uji konvergensi dengan menyempurnakan jaringan. Pendekatan ini efisien di Python karena NumPy memungkinkan operasi vektor cepat pada array 3-D [12].

Prosedur Penelitian

Penelitian ini menerapkan pendekatan analitis dan komputasi untuk menentukan momen inersia asteroid Ryugu melalui langkah-langkah berikut:

Pengumpulan dan Pemrosesan Data Awal

Parameter fisik Ryugu diperoleh dari database NASA-JPL dan publikasi misi Hayabusa2. Dimensi input utama dan kepadatan curah diubah menjadi satuan SI dan digunakan untuk mendefinisikan semi-sumbu elipsoid [3]. Parameter utama yang digunakan adalah:

- Dimensions: $1.004 \times 0.876 \times 0.535$ km
- Density: $1.19 \, g/cm^3$
- Rotation: 7.63262

Unit conversion to SI system:

- Semi-Axis Mayor: $a = 502$ m
- Intermediate semi-axis: $b = 438$ m
- Semi-axis minor: $c = 267.5$ m
- Density: $\rho = 1190 \, kg/m^3$



162173 Ryugu (1999 JU3)			
Classification: Apollo (NEO, PHA) SPKID: 20162173 Related Links: Ephemeris			
Orbit Viewer [view]			
Orbit Parameters [info]			
Orbiting Orbital Elements			
Epoch: 2401000.5 (2025-Nov-21 6) TDB			
Reference: J2000 (heliocentric; IAU76/2000 ecliptic)			
Element	Value	Uncertainty (1-sigma)	Units
a	0.1910626231558206	8.8901E-9	
A	1.190921090916117	3.0438E-9	au
q	0.963305833140625	1.1722E-9	au
i	6.86655186276142	4.2949E-7	deg
node	251.291531553314	2.8478E-6	deg
peri	211.6167659859647	3.2459E-6	deg
M	270.6593628357033	3.0263E-6	deg
tp	246118.3065141658937	4.4289E-6	TDB
period	474.7040189432296	1.8189E-6	d
n	1.29568716446267	4.9526E-9	y
Q	0.756367292353237	2.9074E-9	deg/d
Q	1.418461586518142	3.6253E-9	au

Gambar 2. Parameter Orbit dan Elemen Oskulasi Asteroid (162173) Ryugu [13].

Pemodelan Ryugu sebagai Elipsoid Triaksial

Asteroid diperkirakan sebagai elipsoid triaksial dengan domain volume

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

mengikuti pendekatan elipsoid standar dalam studi mekanika langit [11]; [5].

Transformasi Koordinat Elipsoid

Untuk menyederhanakan integral volume, pemetaan koordinat elipsoid digunakan:

$$x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$$

dengan Jacobian , jadi elemen volume menjadi: $J = abc$

$$dV = dx dy dz = abc d\xi d\eta d\zeta$$

Di bawah substitusi ini, domain ellipsoid berubah menjadi bola satuan

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq 1$$

[14]; [9].

Perhitungan Momen Inersia Analitis

Dengan asumsi kepadatan seragam, momen utama inersia dihitung menggunakan rumus ellipsoid homogen bentuk tertutup:

$$I_{xx} = \frac{1}{5} M(b^2 + c^2), I_{yy} = \frac{1}{5} M(a^2 + c^2), I_{zz} = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2).$$

dan diverifikasi melalui evaluasi triple-integral atas lingkup satuan [9].

Implementasi Numerik 3D Simpson

Karena integral rangkap tiga di atas benda kompleks jarang mengakui solusi analitis, momen inersia juga diperkirakan secara numerik menggunakan aturan Simpson 3D:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \sum_{i=0}^{Nx} \sum_{j=0}^{Ny} \sum_{k=0}^{Nz} w_i w_j w_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z$$

(Ramirez, 2022). Alur kerja termasuk membangun kisi 3D, menetapkan bobot Simpson, dan menerapkan fungsi indikator untuk hanya mempertahankan titik di dalam ellipsoid [15].

Validasi dan Analisis Kesalahan

Hasil numerik dibandingkan dengan solusi analitik menggunakan kesalahan relatif:

$$\text{Error} = \left| \frac{I_{\text{numeric}} - I_{\text{analytic}}}{I_{\text{analytic}}} \right| \times 100\%$$

Konvergensi dievaluasi dengan meningkatkan resolusi grid untuk mengkonfirmasi bahwa kesalahan berkurang seiring pertumbuhan N [15]; [7]. Validasi ini memastikan stabilitas numerik dan konsistensi dengan nilai teoretis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Hasil Perhitungan Analitik

Data asteroid Ryugu diambil dari Hayabusa [1] yaitu:

- Asteroid Dimensi: $1,004 \text{ km} \times 0,876 \text{ km} \times 0,535 \text{ km}$
- Kepadatan: $1,19 \text{ g/cm}^3$

Konversi dalam satuan SI:

- Semi-Axis Mayor:

$$a = \frac{1,004}{2} = 0,502 \text{ km} = 502 \text{ m}$$

- Intermediate semi-axis:

$$b = \frac{0,876}{2} = 0,438 \text{ km} = 438 \text{ m}$$

- Semi-axis minor:

$$c = \frac{0,535}{2} = 0,2675 \text{ km} = 267,5 \text{ m}$$

- Density:

$$\rho = 1,19 \text{ g/cm}^3 = 1190 \text{ kg/m}^3$$

2. Perhitungan Volume dan Massa

Volume Ellipsoid:

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

Langkah-langkah perhitungan:

$$\begin{aligned} 502 \times 438 &= 219.876 \\ 219.876 \times 267,5 &= 58.816.830 \\ V &= \frac{4}{3} \pi \times 58.816.830 \\ &= \frac{4}{3} \times 3,141592 \times 58.816.830 \\ &= 4,1887893 \times 58.816.830 \\ &= 246.371.310,12448 \end{aligned}$$

Total Mass:

$$\begin{aligned} M &= \rho \cdot V \\ M &= 1190 \times 246.371.310,1 \\ &= 293.181.859.019 = 2,931 \times 10^{11} \end{aligned}$$

3. Perhitungan Analitis Momen Inersia

Rumus umum untuk Ellipsoid Homogen:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{M}{5} (b^2 + c^2), \\ I_{yy} &= \frac{M}{5} (a^2 + c^2), \\ I_{zz} &= \frac{M}{5} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Perhitungan I_{xx} :

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 438^2 + 267,5^2 \\ &= 191.844 + 71.556,25 \\ &= 263.400,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{2,931 \times 10^{11}}{5} \times 263.400,25 \\ &= 5,862 \times 10^{10} \times 263.400,25 \\ &= 1,544 \times 10^{16} \end{aligned}$$

Perhitungan I_{yy} :

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 502^2 + 267,5^2 \\ &= 252.004 + 71.556,25 \\ &= 323.560,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{2,931 \times 10^{11}}{5} \times 323.560,25 \\ &= 5,862 \times 10^{10} \times 323.560,25 \end{aligned}$$

$$= 1,896 \times 10^{16}$$

Perhitungan I_{zz} :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 502^2 + 438^2 \\ &= 252.004 + 191.844 \\ &= 443.848 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \frac{2,931 \times 10^{11}}{5} \times 443.848 \\ &= 5,862 \times 10^{10} \times 443.848 \\ &= 2,601 \times 10^{16} \end{aligned}$$

Tabel 1. Nilai Momen Inersia Asteroid Ryugu

Komponen	Nilai ($kg \cdot m^2$)
I_{xx}	$1,544 \times 10^{16}$
I_{yy}	$1,896 \times 10^{16}$
I_{zz}	$2,601 \times 10^{16}$

Rasio Momen Inersia:

$$\frac{I_{zz}}{I_{xx}} = \frac{2,601}{1,544} = 1,6845, \quad \frac{I_{zz}}{I_{yy}} = \frac{2,601}{1,896} = 1,372$$

4. Hasil Perhitungan Numerik

Berdasarkan simulasi yang dilakukan menggunakan metode Simpson integrasi 3D, data momen inersia dari asteroid Ryugu diperoleh sebagai berikut

Tabel 2. Hasil Perhitungan dan Validasi Momen Inersia Asteroid Ryugu

Komponen	Nilai ($10^{16} \cdot kg \cdot m^2$)	Error (%) $N = 51$	Error (%) $N = 101$	Error (%) $N = 151$
I_{xx}	1,548	0,1820	0,1192	0,0682
I_{yy}	1,9024	0,1920	0,1189	0,0649
I_{zz}	2,6074	0,1814	0,1192	0,0658

5. Interpretasi Hasil

Hasil perhitungan, baik secara analitis maupun numerik, menunjukkan pola yang konsisten di mana: . Urutan nilai momen inersia ini selaras dengan geometri elipsoid Ryugu yang memiliki panjang sumbu utama. Besarnya nilai menunjukkan bahwa sumbu z adalah sumbu yang paling sulit untuk diputar, atau dengan kata lain, memiliki ketahanan terbesar terhadap perubahan rotasi. $I_{zz} > I_{yy} > I_{xx}$ $a > b > c$ Menunjukkan bahwa sumbu z adalah sumbu yang paling tahan terhadap perubahan rotasi. Temuan ini memperkuat kesimpulan pengamatan Hayabusa2, yang menegaskan bahwa rotasi Ryugu stabil di sekitar sumbu dengan momen inersia terbesarnya, dalam hal ini sumbu z.

6. Konvergensi Metode 3D Simpson

Berdasarkan hasil simulasi, kesalahan relatif perhitungan numerik menurun signifikan seiring dengan peningkatan kepadatan grid, dari 0,18% menjadi 0,12%, dan akhirnya mencapai 0,06%. Pola pengurangan kesalahan yang hampir setengahnya setiap kali resolusi grid ditingkatkan menegaskan bahwa metode integrasi 3D Simpson yang diterapkan stabil dalam perhitungannya, konsisten dalam perilakunya, dan menyatu secara bertahap menuju nilai aktual dari solusi analitik.

7. Akurasi Metode Numerik

Berdasarkan tingkat kesalahan di bawah 0,1% yang dicapai pada resolusi grid, dapat disimpulkan bahwa metode integrasi 3D Simpson: $N = 151$

- a. Ini memiliki kemampuan yang andal untuk menghitung momen inersia tiga dimensi dengan tingkat presisi yang tinggi.
- b. Ini adalah pendekatan komputasi yang tepat untuk diterapkan pada objek kompleks seperti asteroid dengan bentuk tidak beraturan.
- c. Ini dapat berfungsi sebagai alat validasi yang efektif untuk model asteroid polihedral yang lebih realistis dalam penelitian lebih lanjut.

8. Relevansi Fisik

Nilai momen inersia terbesar yang terletak pada sumbu z memiliki implikasi fisik yang penting, termasuk:

- a. Menjaga stabilitas rotasi asteroid dalam jangka waktu yang lama.
- b. Memengaruhi respons dinamika rotasi saat terkena interferensi seperti Efek YORP.
- c. Tentukan potensi perubahan kecepatan rotasi yang mungkin terjadi karena tabrakan dengan benda langit kecil.

Oleh karena itu, pendekatan pemodelan berbentuk elipsoid dapat dianggap sebagai langkah pertama yang cukup representatif dan efektif, sebelum mengembangkan analisis yang lebih rinci menggunakan model polihedral kompleks dari data Hayabusa2.

9. Diskusi

Berdasarkan simulasi yang dilakukan dengan menggunakan metode integrasi 3D Simpson, momen inersia asteroid Ryugu diperoleh sebagai . Hierarki konsisten dengan karakteristik ellipsoid triaksial dan mengkonfirmasi sumbu rotasi utama dalam arah-z. $I_{xx} = 1,5489 \times 10^{16} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_{yy} = 1,9024 \times 10^{16} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, and $I_{zz} = 2.6074 \times 10^{16} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $I_{zz} > I_{yy} > I_{xx}$

Validasi metode Simpson 3D menunjukkan konvergensi yang memadai dengan kesalahan relatif 0,06% pada resolusi grid. Tingkat akurasi ini menunjukkan keandalan metode numerik yang diterapkan untuk perhitungan momen inersia objek tiga dimensi. $N = 151$

Hasil analisis baik secara analitis maupun numerik menunjukkan tingkat keselarasan yang tinggi dalam memperkirakan momen inersia asteroid Ryugu. Solusi yang tepat untuk model ellipsoid ideal disediakan oleh pendekatan analitis, sedangkan metode Simpson 3D menawarkan alternatif numerik yang andal dan efisien untuk menangani perhitungan integral tiga dimensi pada domain yang kompleks.

Mengingat bahwa bentuk asteroid yang sebenarnya tidak menyerupai ellipsoid yang sempurna dan memiliki variasi dalam kepadatan internal, metode numerik seperti Simpson 3D menjadi penting untuk simulasi yang mendekati kondisi nyata. Validasi yang dilakukan pada model ellipsoid seragam berfungsi sebagai langkah verifikasi penting untuk memastikan keakuratan implementasi numerik sebelum diterapkan pada model bentuk yang lebih tidak beraturan.

Tingkat kesalahan yang sangat rendah, di bawah 0,1% pada resolusi grid, menunjukkan beberapa hal: $N = 151$

- a. Metode ini berhasil mendefinisikan dan memetakan domain bentuk elipsoid.
- b. Penerapan skema pembobotan dalam aturan Simpson 3D telah dilakukan dengan benar.
- c. Metode ini menunjukkan tingkat konvergensi yang sangat baik saat kepadatan jaringan

meningkat.

Dengan demikian, hasil ini membangun dasar yang kuat untuk menerapkan metode komputasi yang sama pada model polihedral Ryugu yang lebih rinci, untuk mendapatkan perkiraan yang lebih realistis dari medan gravitasi, potensial, dan dinamika rotasinya.

KESIMPULAN

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa momen inersia asteroid Ryugu dapat dihitung secara tepat melalui pendekatan analitis dan kemudian diverifikasi menggunakan metode numerik Simpson 3D berbasis Python. Perhitungan analitik pada model elipsoid triaksial kepadatan seragam menghasilkan komponen momen inersia dan, dengan urutan . Pola hierarkis ini sesuai dengan konfigurasi sumbu mayor, tengah, dan minor pada elipsoid. $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} > I_{yy} > I_{xx}$

Proses validasi numerik dengan aturan Simpson 3D menunjukkan tingkat konvergensi yang sangat baik, ditandai dengan kesalahan relatif kurang dari 0,1% pada grid dengan resolusi $N=151$. Hasil ini menegaskan bahwa metode Simpson 3D memiliki akurasi dan stabilitas tinggi dalam mendekati integral rangkap tiga, bahkan untuk objek dengan geometri kompleks.

Secara keseluruhan, pendekatan yang digunakan tidak hanya memberikan dasar komputasi yang kuat untuk model elipsoid homogen, tetapi juga membuka kemungkinan penerapannya pada model polihedral yang lebih dekat dengan bentuk sebenarnya, sehingga menguntungkan studi lebih lanjut tentang dinamika rotasi dan medan gravitasi asteroid.

DAFTAR PUSTAKA

- A. Firdaus, A. Amrullah, N. P. Wulandari, and N. Hikmah, "Analisis Efisiensi Integral Numerik Metode Simpson 1/3 dan Simpson 3/8 Menggunakan Program Software Berbasis Pascal," *J. Teknol. Inform. dan Komput.*, vol. 9, no. 2, pp. 1051–1064, 2023, doi: 10.37012/jtik.v9i2.1737.
- A. Firdaus, N. P. Wulandari, and N. Hikmah, "Numerical integral efficiency analysis of the Simpson and Simpson method using Pascal-based software programs," *J. Pendidik. Fis. (unspecified journal)*, vol. 9, no. 2, pp. 1051–1064, 2023.
- E. Soegiartini and S. Siregar, "TELAH AWAL KEUBAHAN SETENGAH SUMBU PANJANG AKIBAT EFEK YARKOVSKY PADA ASTEROID 3362 KHUFU (1984 QA)," *J. Sains Dirgant.*, vol. 5, no. 2, pp. 169–181, 2008.
- E. W. Weisstein, "Ellipsoid."
- J. Lu, H. Shang, and X. Zhang, "A global binary asteroid system model with irregularly shaped components via iterated surface integral," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 536, no. v, pp. 592–602, 2025, doi: 10.1093/mnras/stae2630.
- M. Irwan, Irwan, Darmiani, and E. Jalil, "Application of double fold integral in quadratic surface volume determination," *J.*, vol. 9, no. 1, 2021.
- M. L. Mota, A. Safwan, and A. F. B. A. Prado, "Analytical modeling of the gravitational potential of irregularly shaped celestial bodies considering three distinct internal structures: application to (21) Lutetia," pp. 1–10, 2025.
- M. M. Chusni, M. F. Rizaldi, and S. Nurlaela, "Determination of the moment of inertia of a solid cylindrical body with an integral and a tracker," *J. Pendidik. Fis. dan Keilmuan*, vol. 4, no. 1, pp. 42–47, 2018, doi: 10.2572/jpfk.v4i1.2068.
- NASA Jet Propulsion Laboratory, "Small-Body Database Lookup: (162173) Ryugu," 2025.

- [Online]. Available: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=162173
- National Aeronautics and Space Administration, “Eyes on Asteroids: Asteroid (162173) Ryugu,” 2025. [Online]. Available: https://eyes.nasa.gov/apps/asteroids/#/162173_ryugu
- P. Andriani, *Calculus of Multiple Variables*. Sanabil, 2020.
- S. Aljbaae, T. G. G. Chanut, V. Carruba, J. Souchay, A. F. B. A. Prado, and A. Amarante, “The dynamical environment of asteroid 21 Lutetia according to different internal models,” *Mon. Not. Roal Astron. Soc.*, vol. 464, pp. 3552–3560, 2017, doi: 10.1093/mnras/stw2619.
- S. V Ershkov and R. V Shamin, “THE DYNAMICS OF ASTEROID ROTATION, GOVERNED BY YORP EFFECT: THE KINEMATIC ANSATZ,” vol. 07, pp. 1–23, 2016.
- S. Watanabe et al., “Hayabusa2 arrives at the carbonaceous asteroid 162173 Ryugu: A pile of spinning top-shaped debris,” *Science (80-.)*, vol. 364, no. 6437, pp. 268–272, 2019, doi: 10.1126/science.aav8032.
- T. Henych and P. Pravec, “Slowly increasing the elongation of non-spherical asteroids: Simulation using a representation of a triaxial ellipsoid,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 454, no. 2, pp. 1704–1713, 2015.