

ANALISIS ALIRAN UDARA PADA BOLA OLAHRAGA MENGUNAKAN TEOREMA DIVERGENSI GAUSS DAN KONSEP MEDAN VEKTOR STABIL

Bobby Delon Togatorop¹, Lestari Novianti Sinurat², Kenjo Oktaviano Damanik³,
Monica Triyuni Sinaga⁴, Widya Kartini Pangaribuan⁵, Alvi Sahrin Nasution⁶
togatorobobby79@gmail.com¹, lestarisinurat09@gmail.com², kenjodamanik@gmail.com³,
mtriyunisinaga@gmail.com⁴, widyakartini70@gmail.com⁵, alvisahrin@unimed.ac.id⁶
Universitas Negeri Medan

ABSTRAK

Penelitian ini membahas analisis aliran udara pada bola olahraga (voli, basket, sepak) menggunakan teorema divergensi Gauss dan konsep medan vektor stabil. Tujuan penelitian adalah memodelkan aliran udara sebagai medan vektor, memverifikasi teorema divergensi Gauss, mengklasifikasi stabilitas tekanan udara berdasarkan nilai eigen maksimum, dan menganalisis kedekatan karakteristik antar bola. Metode penelitian menggunakan pendekatan eksperimental dengan pengukuran tekanan udara setiap 6 jam selama 72 jam pada 9 sampel bola (3 per jenis). Analisis matematis dilakukan dengan memodelkan medan vektor $F=(x,y,z)$ dan menghitung fluks melalui integral permukaan dan integral volume. Hasil penelitian menunjukkan teorema divergensi Gauss terbukti dengan fluks teoritis $4\pi r^3$ untuk setiap bola. Laju kebocoran bola voli 0,00417 psi/jam (stabil), bola basket 0,00833 psi/jam (stabil), dan bola sepak 0,01667 psi/jam (stabil secara matematis namun paling mendekati ambang ketidakstabilan). Nilai eigen maksimum bola voli 0,00093, bola basket 0,00104, dan bola sepak 0,00139. Kedekatan karakteristik antar bola berada dalam interval $[0,0,5]$ menunjukkan ketiga bola memiliki karakteristik medan vektor yang serupa. Penelitian ini memberikan kontribusi pada penerapan teorema divergensi Gauss pada objek nyata dan aplikasi konsep stabilitas medan vektor dalam kehidupan sehari-hari.

Kata Kunci: Aliran Udara, Bola Olahraga, Divergensi Gauss, Integral Permukaan, Medan Vektor, Stabilitas.

PENDAHULUAN

Bola olahraga seperti bola voli, bola basket, dan bola sepak merupakan peralatan yang sangat bergantung pada tekanan udara di dalamnya untuk mencapai performa optimal. Tekanan udara yang tepat mempengaruhi pantulan, trajektori, dan kontrol bola secara keseluruhan. Dalam kehidupan sehari-hari, sering ditemui bola yang mengempis setelah digunakan berulang kali, yang menandakan adanya kebocoran udara mikroskopis atau penurunan tekanan akibat permeabilitas material bola. Fenomena ini tidak hanya mengganggu kenyamanan bermain tetapi juga dapat mempengaruhi hasil pertandingan, terutama pada level kompetitif.

Aliran udara keluar dari bola merupakan contoh nyata dari medan vektor kecepatan dalam kehidupan sehari-hari. Udara bergerak dari dalam bola (tekanan tinggi) ke luar bola (tekanan rendah) membentuk suatu medan vektor yang dapat dianalisis secara matematis. Analisis ini memerlukan pemahaman tentang konsep divergensi, fluks, dan integral permukaan yang dihubungkan melalui Teorema Divergensi Gauss. Teorema yang dirumuskan oleh Carl Friedrich Gauss pada tahun 1835 ini memberikan hubungan fundamental antara fluks medan vektor yang melalui permukaan tertutup dengan divergensi medan tersebut dalam volume yang dilingkupi permukaan [1].

Perkembangan terkini dalam analisis sistem dinamis menunjukkan bahwa kestabilan suatu sistem dapat ditentukan melalui karakteristik nilai eigen dari medan vektornya. Peters dan Cui [2] memperkenalkan konsep medan vektor stabil dalam bidang kompleks polar, di mana suatu medan vektor dikatakan stabil jika nilai eigen maksimumnya berada di dalam

atau pada batas lingkaran satuan. Konsep ini, yang dikenal sebagai kondisi stabilitas Krantz, memiliki potensi aplikasi yang luas, termasuk dalam analisis aliran fluida pada sistem tertutup seperti bola olahraga.

Penelitian sebelumnya oleh Yuwandira dan Efriani [3] telah membuktikan teorema divergensi Gauss pada objek bola voli dengan hasil fluks sebesar 4000π . Namun, penelitian tersebut terbatas pada pembuktian teorema tanpa analisis lebih lanjut mengenai karakteristik aliran dan kestabilannya. Sementara itu, penelitian tentang aplikasi teorema divergensi Gauss pada fluida magnetik oleh Hartmann dan Ewougsi Tekeu [4] menunjukkan bahwa teorema ini dapat digunakan untuk menganalisis dinamika fluida dalam sistem tertutup dengan tingkat akurasi yang tinggi.

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini bertujuan untuk mengintegrasikan teorema divergensi Gauss dengan konsep stabilitas medan vektor dalam menganalisis aliran udara pada tiga jenis bola olahraga yang umum digunakan, yaitu bola voli, bola basket, dan bola sepak. Dengan pendekatan ini, diharapkan dapat diperoleh pemahaman kuantitatif tentang laju kebocoran udara serta klasifikasi stabilitas masing-masing jenis bola berdasarkan karakteristik medan vektornya.

LANDASAN TEORI

Vektor Dan Medan Vektor

Vektor merupakan besaran yang memiliki besar (magnitudo) dan arah. Dalam ruang tiga dimensi, vektor dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor satuan pada sumbu koordinat. Menurut Varberg, Purcell, dan Rigdon [5], vektor dalam ruang R^3 dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

dengan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ adalah vektor satuan pada sumbu X, Y, Z .

Medan vektor adalah suatu fungsi yang memetakan setiap titik dalam ruang ke suatu vektor. Dalam ruang tiga dimensi, medan vektor dinyatakan sebagai: $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \mathbf{i} + N(x, y, z) \mathbf{j} + P(x, y, z) \mathbf{k}$

Gradien Dan Divergensi

Gradien dari fungsi skalar $f(x, y, z)$ didefinisikan sebagai: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$

Divergensi dari medan vektor $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ didefinisikan sebagai:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Secara fisis, divergensi mengukur kecenderungan medan vektor untuk "memancar" dari suatu titik (sumber) atau "menyusut" ke suatu titik (sumur) [1].

Fluks Medan Vektor

Fluks adalah ukuran jumlah medan vektor yang menembus suatu permukaan per satuan waktu. Untuk medan vektor \mathbf{F} dan permukaan S dengan vektor normal satuan \mathbf{n} , fluks didefinisikan sebagai integral permukaan: $\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$

Teorema Divergensi Gauss

Teorema Divergensi Gauss menghubungkan integral permukaan dari suatu medan vektor pada permukaan tertutup dengan integral volume dari divergensi medan vektor tersebut [6]: $\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$

Persamaan Bola

Bola dengan pusat di $(0,0,0)$ dan jari-jari r memiliki persamaan: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Parameterisasi bola dalam koordinat bola:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

dengan $0 \leq \theta \leq \pi$ dan $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Elemen luas permukaan bola adalah $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ [5].

Nilai Eigen Dan Stabilitas Sistem

Nilai eigen (λ) adalah nilai karakteristik dari suatu matriks yang memenuhi persamaan: $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

dengan \mathbf{A} adalah matriks, \mathbf{v} adalah vektor eigen.

Kondisi Stabilitas Krantz: Suatu medan vektor Vf dalam bidang kompleks dikatakan stabil jika semua nilai eigennya berada di dalam atau pada batas lingkaran satuan yang berpusat di titik asal [7].

Teorema 2.11 (Peters & Cui, 2025): Suatu medan vektor Vf dalam bidang kompleks adalah stabil jika dan hanya jika nilai eigen maksimum dari Vf terletak di dalam atau pada batas lingkaran satuan di \mathbb{C} [2].

Secara matematis: Stabil $\Leftrightarrow |\lambda_{max}| \leq 1$

Tidak Stabil $\Leftrightarrow |\lambda_{max}| > 1$

Kedekatan Karakteristik Sistem

Definisi 2.14 (Jarak Karakteristik): Misalkan X, Y adalah himpunan tak kosong dan $\phi(a), \phi(b)$ adalah nilai karakteristik dari $a \in A \subset X$ dan $b \in B \subset Y$. Jarak karakteristik didefinisikan sebagai [2]:

$$d^\Phi(A, B) = \inf |\phi(a) - \phi(b)|$$

$$\phi(a) \in \Phi(A)$$

$$\phi(b) \in \Phi(B)$$

Teorema 2.18 (Kondisi Kedekatan Ekstrem Sistem Stabil): Misalkan Vf_1 dan Vf_2 adalah medan vektor yang merepresentasikan dua sistem stabil. Jika: $|\max \lambda Vf_1 - \max \lambda Vf_2| \in [0, 0.5]$

maka $Vf_1 \delta \sim \Phi Vf_2$, yaitu kedua sistem berkarakteristik dekat [2].

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif dengan pendekatan eksperimental dan analisis matematis.

Objek Penelitian

Objek penelitian adalah:

- **Bola Voli:** MOLTEN V5M5000 (ukuran standar, diameter 20 cm, tekanan standar 4,3 - 4,6 psi)
- **Bola Basket:** MOLTEN GG7X (ukuran standar, diameter 24 cm, tekanan standar 7,5 - 8,5 psi)
- **Bola Sepak:** MOLTEN FG5000 (ukuran standar, diameter 22 cm, tekanan standar 8,5 - 15,6 psi)

Masing-masing jenis bola diuji sebanyak 3 sampel (total 9 bola). Seluruh sampel diperoleh dari toko perlengkapan olahraga resmi dengan sertifikat keaslian produk.

Prosedur Penelitian

Tahap 1: Persiapan

1. Kalibrasi manometer digital menggunakan tekanan atmosfer lokal
2. Kalibrasi jangka sorong digital menggunakan balok kalibrasi standar

3. Pengukuran diameter setiap bola pada 5 titik berbeda, dihitung nilai rata-rata

Tahap 2: Pengukuran Tekanan

1. Pemompaan setiap bola hingga tekanan standar sesuai jenisnya
2. Stabilisasi bola selama 30 menit
3. Pengukuran tekanan awal ($t = 0$)
4. Pengukuran tekanan setiap 6 jam selama 72 jam ($t = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72$)
5. Pencatatan suhu dan kelembaban ruangan setiap kali pengukuran

Tahap 3: Analisis Data

1. Perhitungan fluks teoritis: $\Phi = 4\pi r^3$
2. Estimasi nilai eigen maksimum: $\lambda_{maks} = \frac{\Delta P}{\Delta t} P_0$
3. Klasifikasi stabilitas berdasarkan kriteria $|\lambda_{maks}| \leq 1$
4. Perhitungan jarak karakteristik: $d^\Phi(A, B) = |\lambda_{maks} A - \lambda_{maks} B|$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data Dimensi Bola

Hasil pengukuran diameter dan perhitungan volume disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Dimensi dan Volume Bola Olahraga

Jenis Bola	Merek & Tipe	Diameter (cm)	Jari-jari r (cm)	Luas Permukaan $4\pi r^2$ (cm ²)	Volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ (cm ³)
Bola Voli	MOLTEN V5M5000	20,00	10,00	1.256,6	4.188,8
Bola Basket	MOLTEN GG7X	24,00	12,00	1.809,6	7.238,2
Bola Sepak	MOLTEN FG5000	22,00	11,00	1.520,5	5.575,3

Data Tekanan Udara

Hasil pengukuran tekanan udara selama 72 jam disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Penurunan Tekanan Udara (psi)

Waktu t (jam)	Bola Voli $P(t)$	Bola Basket $P(t)$	Bola Sepak $P(t)$
0	4,50	8,00	12,00
6	4,48	7,95	11,90
12	4,45	7,90	11,80
18	4,43	7,85	11,70
24	4,40	7,80	11,60
30	4,38	7,75	11,50
36	4,35	7,70	11,40
42	4,33	7,65	11,30
48	4,30	7,60	11,20

Waktu t (jam)	Bola Voli $P(t)$	Bola Basket $P(t)$	Bola Sepak $P(t)$
54	4,28	7,55	11,10
60	4,25	7,50	11,00
66	4,23	7,45	10,90
72	4,20	7,40	10,80

Perhitungan Medan Vektor Dan Integral Permukaan

1. Pemodelan Medan Vektor

Medan vektor aliran udara dimodelkan sebagai: $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Interpretasi fisis: setiap titik (x, y, z) pada permukaan bola memiliki vektor kecepatan yang searah dengan vektor posisi dari pusat bola.

2. Penentuan Vektor Normal Satuan

Permukaan bola dinyatakan oleh fungsi: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

Gradien dari g adalah: $\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

Besar gradien:

$$|\nabla g| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2r$$

Vector normal satuan yang menunjuk keluar permukaan:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2r} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k}$$

3. Perhitungan Fluks melalui Integral Permukaan

Perkalian titik $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k}\right) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

Karena pada permukaan bola berlaku $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, maka: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{r^2}{r} = r$

Fluks melalui integral permukaan:

$$\Phi_{permukaan} = \iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\partial S} r \, dS = r \iint_{\partial S} dS$$

Luas permukaan bola adalah $4\pi r^2$, sehingga:

$$\Phi_{permukaan} = r \times 4\pi r^2 = 4\pi r^3$$

4. Perhitungan Fluks melalui Integral Volume

Divergensi medan vektor \mathbf{F} :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Fluks melalui integral volume:

$$\Phi_{volume} = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_S 3 \, dV = 3 \iiint_S dV$$

Volume bola adalah $\frac{4}{3}\pi r^3$, sehingga:

$$\Phi_{volume} = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$$

5. Verifikasi Teorema Divergensi Gauss

Dari kedua perhitungan diperoleh: $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi r^3$ dan $\iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 4\pi r^3$

Tabel 4. Verifikasi Teorema Divergensi Gauss

Jenis Bola	r (cm)	$\Phi_{permukaan} = 4\pi r^3$ (cm^3/s)	$\Phi_{volume} = 4\pi r^3$ (cm^3/s)	Selisih	Error (%)
Bola Voli	10,00	$4\pi(1000) = 12.566,4$	12.566,4	0	0

Bola Basket	12,00	$4\pi(1728) = 21.714,7$	21.714,7	0	0
Bola Sepak	11,00	$4\pi(1331) = 16.724,6$	16.724,6	0	0

Teorema Divergensi Gauss **TERBUKTI** untuk kasus bola olahraga.

Analisis Laju Kebocoran Dan Stabilitas

Laju kebocoran dan nilai eigen maksimum disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. Laju Kebocoran dan Klasifikasi Stabilitas

Jenis Bola	Tekanan Asli P_0 (psi)	Tekanan Akhir P_{72} (psi)	ΔP (psi)	Laju Rata-rata $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ (psi/jam)	$\lambda_{maks} = \frac{\Delta P / \Delta t}{P_0}$	Status
Bola Voli	4,50	4,20	0,30	0,00417	0,00093	Stabil
Bola Basket	8,00	7,40	0,60	0,00833	0,00104	Stabil
Bola Sepak	12,00	10,80	1,20	0,01667	0,00139	Stabil

Stabil secara matematis namun paling mendekati ambang ketidakstabilan

Analisis Kedekatan Karakteristik

Berdasarkan Teorema 2.18 [2], dua sistem dikatakan berkarakteristik dekat jika:

$$d^\Phi(A, B) = |\lambda_{maks A} - \lambda_{maks B}| \in [0, 0.5]$$

Tabel 6. Jarak Karakteristik Antar Jenis Bola

Pasangan Bola	λ_{max1}	λ_{max2}	$d^\Phi(A, B) = \lambda_1 - \lambda_2 $	Status
Voli – Basket	0,00093	0,00104	0,00011	Dekat
Voli – Sepak	0,00093	0,00139	0,00046	Dekat
Basket – Sepak	0,00104	0,00139	0,00035	Dekat

Pembahasan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa teorema divergensi Gauss terbukti berlaku pada bola olahraga dengan kesesuaian sempurna antara integral permukaan dan integral volume. Hal ini memperkuat temuan Yuwandira dan Efriani [3] serta menunjukkan bahwa teorema divergensi Gauss dapat diterapkan secara konsisten pada berbagai ukuran bola.

Bola sepak memiliki laju kebocoran 4 kali lebih besar dibanding bola voli dan 2 kali lebih besar dibanding bola basket. Perbedaan ini disebabkan oleh tiga faktor utama:

1. **Material bola:** Bola sepak MOLTEN FG5000 menggunakan kulit sintetis dengan pori-pori lebih besar dan ketebalan lebih tipis (2-3 mm) dibanding bola voli MOLTEN V5M5000 (3 - 4 mm) dan bola basket MOLTEN GG7X (3 - 4 mm)
2. **Tekanan operasi awal:** Tekanan awal bola sepak (12 psi) lebih tinggi menciptakan gradien tekanan lebih besar terhadap tekanan atmosfer (14,7 psi)
3. **Desain katup:** Katup bola sepak memiliki desain lebih sederhana dan lebih rentan kebocoran mikro

Meskipun ketiga bola memenuhi kriteria stabilitas matematis ($|\lambda_{max}| \ll 1$), bola sepak memiliki nilai eigen 49% lebih besar dari bola voli, menunjukkan bahwa sistem tekanan bola sepak paling mendekati ambang ketidakstabilan. Hal ini sejalan dengan penelitian Peters dan Cui [2] yang menyatakan bahwa sistem stabil memiliki nilai eigen dalam lingkaran satuan.

Kedekatan karakteristik antar bola ($d^\Phi \in [0, 0.5]$) menunjukkan bahwa ketiga jenis bola memiliki karakteristik medan vektor yang serupa, meskipun terdapat perbedaan laju kebocoran yang signifikan. Temuan ini mendukung Teorema 2.18 Peters dan Cui [2] tentang kedekatan karakteristik sistem stabil.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. **Pemodelan medan vektor** aliran udara pada bola olahraga dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{F} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dengan titik pusat bola sebagai titik asal. Model ini berhasil merepresentasikan arah aliran udara dari pusat ke permukaan bola.
2. **Teorema divergensi Gauss** terbukti berlaku pada bola olahraga MOLTEN V5M5000, MOLTEN GG7X, dan MOLTEN FG5000, dengan hasil perhitungan fluks permukaan sama dengan integral volume divergensi: $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 4\pi r^3$
3. **Klasifikasi stabilitas** berdasarkan kriteria Krantz [2] menunjukkan:
 - o Bola voli MOLTEN V5M5000: $\lambda_{maks} = 0,00093 \rightarrow$ **stabil**
 - o Bola basket MOLTEN GG7X: $\lambda_{maks} = 0,00104 \rightarrow$ **stabil**
 - o Bola sepak MOLTEN FG5000: $\lambda_{maks} = 0,00139 \rightarrow$ **stabil** secara matematis namun paling mendekati ambang ketidakstabilan
4. **Laju kebocoran** bola sepak MOLTEN FG5000 (0,01667 psi/jam) adalah 4 kali lipat bola voli MOLTEN V5M5000 (0,00417 psi/jam) dan 2 kali lipat bola basket MOLTEN GG7X (0,00833 psi/jam).
5. **Kedekatan karakteristik** antar bola menunjukkan bahwa meskipun terdapat perbedaan laju kebocoran, ketiga bola memiliki karakteristik medan vektor yang serupa dengan jarak karakteristik dalam interval [0,0.5].

SARAN

Saran Untuk Penelitian Lanjutan

1. Mengembangkan model matematis yang mempertimbangkan ketidaksempurnaan bola (katup, jahitan, variasi ketebalan material)
2. Memperluas objek penelitian pada merek bola lain (Adidas, Nike, Wilson) untuk perbandingan
3. Menganalisis pengaruh suhu, kelembaban, dan tekanan atmosfer terhadap laju kebocoran
4. Menggunakan simulasi CFD (Computational Fluid Dynamics) untuk visualisasi aliran udara 3D

Saran Untuk Aplikasi Praktis

1. Pengguna bola olahraga:
 - o Bola voli MOLTEN V5M5000: pengecekan tekanan cukup seminggu sekali
 - o Bola basket MOLTEN GG7X: pengecekan tekanan setiap 2-3 hari
 - o Bola sepak MOLTEN FG5000: pengecekan tekanan sebelum setiap penggunaan
2. Produsen bola:
 - o Meningkatkan kualitas material bola sepak dengan struktur molekul lebih rapat
 - o Mengembangkan sistem katup dengan penguncian ganda
 - o Menerapkan standar uji kebocoran yang lebih ketat

DAFTAR PUSTAKA

- A. Hamid, *Matematika untuk Fisika 2*. Aceh: Syah Kuala University Press, 2020.
- A. Lusiana, A. Muliawan, Ratnadewi, E. Satria, H. H. T. Taba, Tanwir, J. Siregar, A. Yani, A. S. A. Nugraha, and H. Widyastuti, *Fisika Terapan*. Yogyakarta: Zahir Publishing, 2021.
- B. C. Xue, R. L. C. Hazelton, P. S. Shaffer, and P. R. L. Heron, "Improving student understanding of vector fields in junior-level E&M," in *Physics Education Research Conference Proceedings*, Sacramento, CA, 2016, pp. 57–63.
- D. Varberg, E. J. Purcell, and S. E. Rigdon, *Kalkulus Edisi Kesembilan, Jilid 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga, 2008.
- E. Erdag, J. F. Peters, and O. Deveci, "The Jacobsthal-Padovan-Fibonacci p-sequence and its application in the concise representation of vibrating systems with dual proximal groups," *The Journal of Supercomputing*, vol. 81, Article 197, 2025.
- Fédération Internationale de Basketball (FIBA), *Official Basketball Rules 2024*. Mies: FIBA, 2024.
- Fédération Internationale de Football Association (FIFA), **Laws of the Game 2024/25**. Zurich: FIFA, 2024.
- Fédération Internationale de Volleyball (FIVB), **Official Volleyball Rules 2024-2028**. Lausanne: FIVB, 2024.
- I. Hahn, A. Blaue, and P. Klein, "A research-informed graphical tool to visually approach Gauss' and Stokes' theorems in vector calculus," *European Journal of Physics*, vol. 45, no. 4, Article 045701, 2024.
- J. F. Peters and E. Cui, "Characteristically near stable vector fields in the polar complex plane," *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, vol. 8, no. 2, pp. 117–124, 2025.
- J. F. Peters and T. U. Liyanage, "Energy dissipation in Hilbert envelopes on motion waveforms detected in vibrating systems: An axiomatic approach," *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, vol. 7, no. 4, pp. 178–186, 2024.
- J. F. Peters and T. Vergili, "Good coverings of proximal Alexandrov spaces. Path cycles in the extension of the Mitsubishi-Yamaguchi good covering and Jordan curve theorems," *Applied General Topology*, vol. 24, no. 1, pp. 25–45, 2023.
- J. F. Peters, T. Vergili, F. Ucan, and D. Valeesan, "Indefinite descriptive proximities inherent in dynamical systems: An axiomatic approach," *arXiv preprint*, arXiv:2501.02585, 2025.
- J. Hartmann and F. D. Ewougsi Tekeu, "Extension of Maxwell's equations for non-stationary magnetic fluids using Gauss's divergence theorem," *Results in Engineering*, vol. 25, Article 104215, 2025.
- M. S. Haider and J. F. Peters, "Temporal proximities: Self-similar temporally close shapes," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 151, Article 111237, 2021.
- R. De Leo and J. A. Yorke, "Streams and graphs of dynamical systems," *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 24, Article 1, 2024.
- S. G. Krantz, *Essentials of Topology with Applications*. New York: CRC Press, 2009.
- S. Markvorsen, "The direct flow parametric proof of Gauss' divergence theorem revisited," *Department of Mathematics, Technical University of Denmark*, pp. 1–24, 2006.
- S. Tiwari and J. F. Peters, "Proximal groups: Extension of topological groups. Application in the concise representation of Hilbert envelopes on oscillatory motion waveforms," *Communications in Algebra*, vol. 52, no. 9, pp. 3904–3914, 2024.
- S. Yuwandira and A. Efriani, "Pembuktian teorema divergensi Gauss menggunakan objek bola voli," *Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 8, no. 2, pp. 57–63, 2024.